بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر
www.tafrihicenter.ir/edu
کلیک کنید
نمونه سوال
گام به گام
امتحان نهایی
جزوه
دانلود آزمون های آزمایشی
متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم
متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم
www.tafrihicenter.ir

فصل اوّل

دایــره

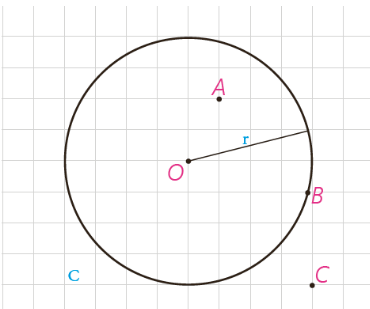
هندسه در ساخت استحکامات دفاعی، قلعه‌ها و برج و باروها از دیرباز کاربردهای بسیاری داشته است. یک قضیهٔ بنیادی در هندسه موسوم به «قضیهٔ هم‌پیرامونی» می‌گوید در بین همهٔ شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت دایره دارای بیشترین مساحت است. این موضوع در طراحی دایره‌ای شکل قلعه‌ها اهمیت بسیاری دارد. قلعهٔ فلک‌الافلاک (شاپور خواست) که از دورهٔ ساسانیان در شهرستان خرم‌آباد به‌جای مانده است نمونهٔ گویایی از همین کاربردهاست.

درس اوّل

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. در ادامه با استفاده از شکل دایره، برخی موارد یادآوری شده‌است که از قبل با آنها آشنایی دارید.

همان‌طور که می‌دانید تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصلهٔ ثابت (اندازهٔ شعاع دایره) هستند. معمولاً دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را به‌صورت C(O,r) نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دایره به سادگی می‌توان نشان داد که :

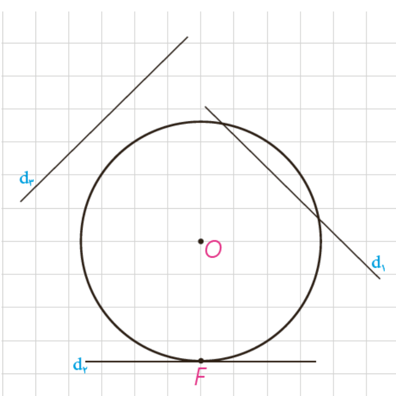


الف) اگر نقطه‌ای مانند B روی دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ..برابربا. شعاع دایره است.

ب) اگر نقطه‌ای مانند C بیرون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره بزرگ‌تر از شعاع دایره است.

پ) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره کوچک‌تر از شعاع دایره است.

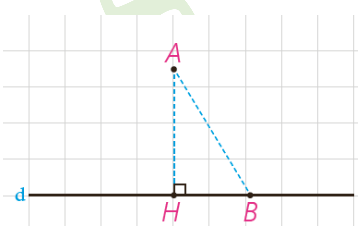
اوضاع نسبی خط و دایره



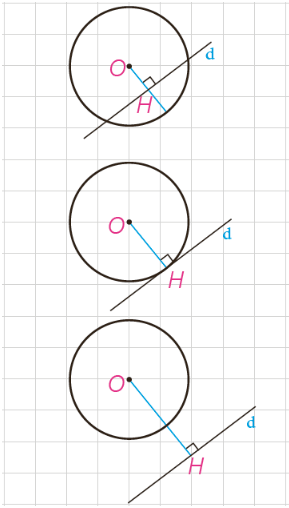
در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطهٔ اشتراک داشته ، و یا هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر **دایره مماس** است و در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ اشتراک داشته باشند، خط و دایره را **متقاطع** می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره **قاطع** می‌نامیم.

یادآوری



اگر خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر d داده شده، و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازهٔ پاره‌خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصلهٔ نقطهٔ A از دیگر نقاط خط d از این مقدار بزرگ‌تر است $(AB > AH)$.



اگر d یک خط و C(O,r) یک دایره و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از نقطهٔ O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصلهٔ خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد (OH < r)، خط و دایره ...در دو... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند

ب) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد (OH = r)، خط و دایره ...در یک.. نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی مماسند.

پ) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد (OH > r)، خط و دایره نقطهٔ اشتراک ندارند.

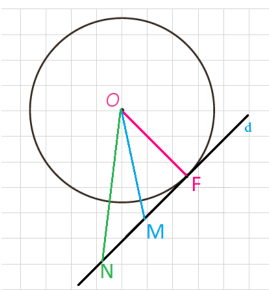
فعالیت

۱ــ فرض کنیم خط d بر دایرهٔ C در نقطهٔ F مماس است.

الف) نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O کدام است؟ چرا؟

نزدیک ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O نقطهٔ F است .می دانیم طول OF = R و هر نقطهٔدیگر از خط dخارج دایره است و با توجه به قسمت (پ) مطالب فوق فاصله ی آن ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است .

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟



در نقطهٔ F قطع می کند.اگر فرض کنیم که در F قطع نکند پس نقطه ی دیگری مانند M وجود دارد که OM بر خط dعمود است.و Mپای عمود است. نقطه ی دیگری مانند N روی خط d هست که Mبین N و Fقرار دارد و FM = MNدر نتیجه :

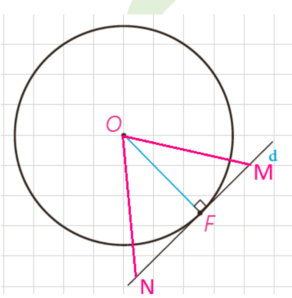
$$\left.\begin{array}{l} FM = MN \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ OM = OM \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OMN} \cong \overset{\Delta}{OMF} \Rightarrow ON = OF = R$$

بنا براین نقطه ی N نیز روی دایره است و این با فرض مماس بودن خط d بر دایره تناقض دارد.پس خط مماس در نقطهٔ F بر OFعمود است.

پ) نتیجه : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطهٔ F بر هم عمودند.

ت) با توجه به قسمت (پ) اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خطِ مماس بر دایره در نقطهٔ F را رسم کنید؟

با توجه به مطلب فوق کافی است خطی را که در نقطهٔF بر OFعمود می شود رسم کنیم . این خط مماس بر دایره می باشد.

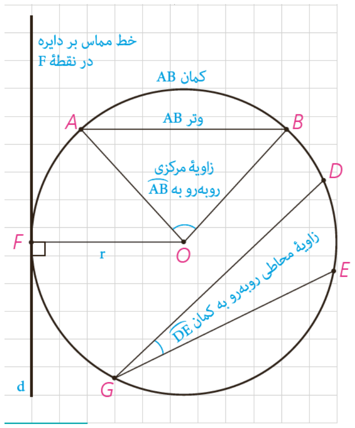


۲ــ خط d در نقطهٔ F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همهٔ نقاط خط d نسبت به دایرهٔ C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطهٔ تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

فرض کنیم M نقطهٔ دیگری غیر از F روی خط d باشد چون OM > OF در نتیجه نقطهٔ Mبرون دایره C است . بنا براین خط dبا دایرهٔ C فقط یک نقطه مشترک دارد. در نتیجه خط d بر دایره مماس است.

بنابراین :

> در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.



زوایای مرکزی، محاطی و ظلی

با تعاریف زوایای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید.

در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

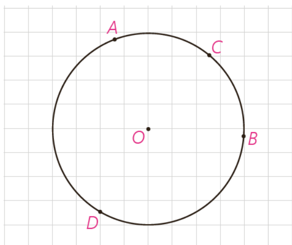
۱ــ شعاع دایره : پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

۲ــ وتر دایره : پاره‌خطی که دوسر آن روی دایره باشد.

۳ــ قطر دایره : وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

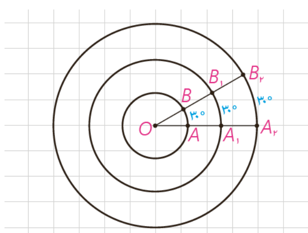
۴ــ زاویهٔ مرکزی : زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

۵ــ زاویهٔ محاطی : زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دووتر از دایره باشند.



۶ــ کمان : کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان $\overset{\frown}{ACB}$ و $\overset{\frown}{ADB}$ را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از $\overset{\frown}{AB}$ کمان کوچک‌ترِ مشخص شده توسط A و B است.

۷ــ اندازهٔ کمان، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

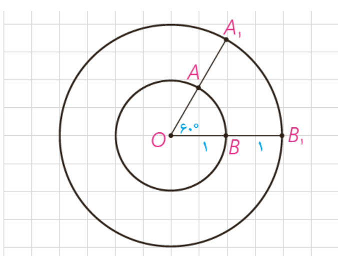


۸ــ با توجه به شکل به سادگی دیده می‌شود که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.

کاردرکلاس

۱ــ با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازهٔ ۳۶۰° است، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{۳۶۰}$$



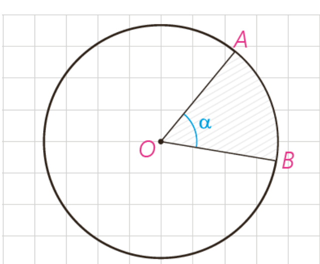
۲ــ با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.

$\text{طول } \overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{۳}$ $\qquad \overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$

$\text{طول } \overset{\frown}{A_1B_1} = \frac{۲\pi}{۳}$ $\qquad \overset{\frown}{A_1B_1} = ۶۰^\circ$

$$\frac{۶۰}{۳۶۰} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{۲\pi \times ۱} \Rightarrow \text{طول } \overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{۳}$$

$$\frac{۶۰}{۳۶۰} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{A_1B_1}}{۲\pi \times ۲} \Rightarrow \text{طول } \overset{\frown}{A_1B_1} = \frac{۲\pi}{۳}$$

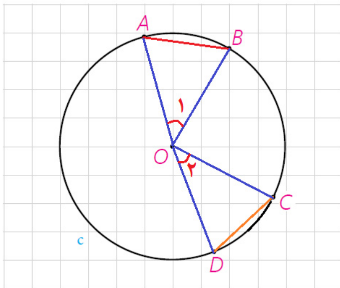


۳ــ ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ C(O,R) برحسب درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با : $L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با : $S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰}$

طول کمان قطاع یک درجه $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره است یعنی $\frac{۲\pi r}{۳۶۰}$. در نتیجه طول کمان نظیر قطاع α درجه $L = \frac{\pi r}{۱۸۰}\alpha$ است

مساحت قطاع یک درجه $\frac{۱}{۳۶۰}$ مساحت دایره است یعنی $\frac{\pi r^۲}{۳۶۰}$. در نتیجه مساحت قطاع α درجه $A = \frac{\pi r^۲}{۳۶۰}\alpha$ است.

فعالیت



۱ــ فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایرهٔ C(O,r) باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.

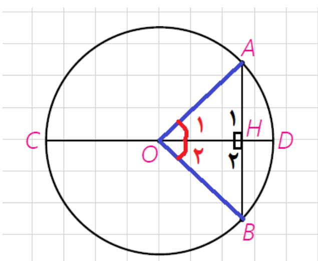
فرض : $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ حکم : $AB=CD$

$$\left.\begin{array}{r}\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OA=OC=R\\ OB=OD=R\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض زض}} OAB\cong OCD\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB=CD$$

۲ــ فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

فرض : $AB=CD$ حکم : $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

$$\left.\begin{array}{l}AB=CD\\ OA=OC=R\\ OB=OD=R\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}} OAB\cong OCD\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\hat{O}_1=\hat{O}_2\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$



۳ــ وتر AB و قطری از دایره که بر وتر AB عمود است مانند شکل مقابل داده شده‌اند. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

فرض: $CD\perp AB$ حکم: $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$, $AH=BH$

$$\left.\begin{array}{l}OA=OB=R\\ H_1=H_2=90^\circ\\ OH=OH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} O\overset{\Delta}{A}H\cong O\overset{\Delta}{B}H\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\left\{\begin{array}{l}AH=BH\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}}\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{array}\right.$$

۴ــ این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

فرض: $AH=BH$ حکم: $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$ و $CD\perp AB$

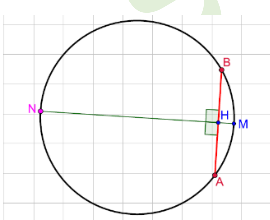
$$\left.\begin{array}{l}OA=OB=R\\ AH=BH\\ OH=OH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\Delta}{A}H\cong O\overset{\Delta}{B}H\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\left\{\begin{array}{l}H_1=H_2=90^\circ\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}}\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{array}\right.$$

۵ــ حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

فرض: $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$ حکم: $AH=BH$ و $CD\perp AB$

$$\left.\begin{array}{r}OA=OB=R\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OH=OH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\overset{\Delta}{A}H\cong O\overset{\Delta}{B}H\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\left\{\begin{array}{l}H_1=H_2=90^\circ\\ AH=BH\end{array}\right.$$

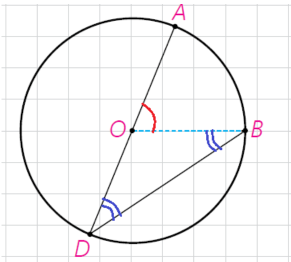
نتیجه : عمودمنصف وتر دایره از مرکز دایره می گذرد.



۶ــ اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

اگر وسط کمان را M و وسط وتر را H بنامیم کافی است این دو نقطه را به هم وصل کنیم و از سمت H امتداد دهیم تا دایره را در نقطهٔ N قطع کند.با توجه به ۴ و ۵ MN قطر عمود بر این وتر است.

فعالیت

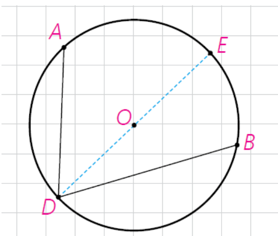


۱ــ در شکل مقابل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

ــ اگر از B به O وصل کنیم، زاویهٔ AOB یک زاویهٔ خارجی برای مثلث متساوی الساقین OBD است.

$\widehat{AOB}=\widehat{ODB}+\widehat{OBD}=۲\widehat{ODB}$ و از آن نتیجه می‌شود :

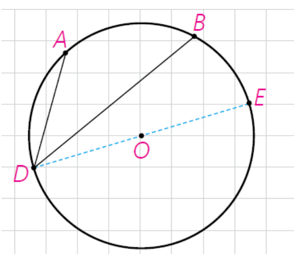
$$\widehat{ODB}=\frac{۱}{۲}\widehat{AOB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}.$$



۲ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

ــ اگر قطر DE را رسم کنیم طبق قسمت ۱ داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}\\ \widehat{EDB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{ADB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}+\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$



۳ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.

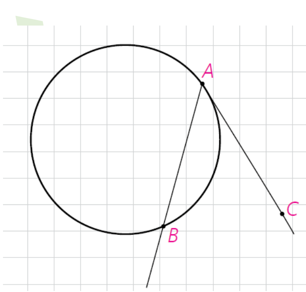
ــ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}\\ \widehat{BDE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{ADB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}-\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$

بنابراین :

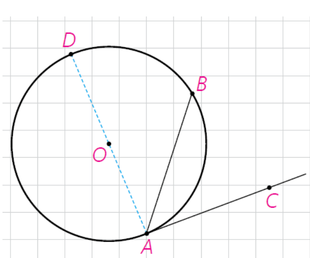
قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه.

زاویهٔ ظلی



نوع دیگری از زاویه که در دایره مطرح است زاویهٔ ظلی می‌باشد. زاویهٔ ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره وضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد. در شکل مقابل $B\hat{A}C$ یک زاویهٔ ظلی است.

فعالیت



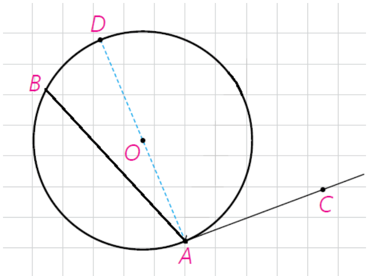
الف) $\widehat{DAC}=$ ..۹۰..° و بنابراین : $\widehat{DAC}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AD}$

ب) زاویهٔ DAB یک زاویهٔ محاطی است.

بنابراین : $\widehat{DAB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DB}$

پ) از (الف) و (ب) داریم : $\widehat{DAC}-\widehat{DAB}=\frac{۱}{۲}(\widehat{DA}-\widehat{DB})$

و بنابراین $\widehat{BAC}=\frac{۱}{۲}\widehat{AB}$



ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.

الف) $\widehat{DAC}=$ ..۹۰.° و بنابراین : $\widehat{DAC}=\frac{۱}{۲}\widehat{AD}$

ب) زاویهٔ DAB یک زاویهٔ محاطی است.

بنابراین : $\widehat{DAB}=\frac{۱}{۲}\widehat{DB}$

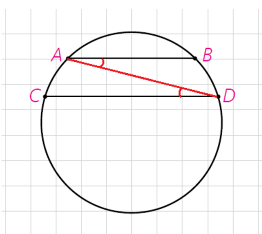
پ) از (الف) و (ب) داریم : $\widehat{DAC}+\widehat{DAB}=\frac{۱}{۲}(\widehat{DA}+\widehat{DB})$

و بنابراین $\widehat{BAC}=\frac{۱}{۲}\widehat{AB}$

بنابراین :

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با ...نصف... کمان روبه‌رو به آن زاویه.

کاردرکلاس



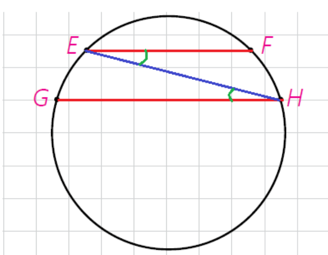
۱ــ در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.

الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

این دو زاویه بنا بر قضیه خطوط موازی با هم برابر هستند.

ب) کمان‌های $\widehat{BD}$ و $\widehat{AC}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

این دو کمان روبه رو به زوایای محاطی برابر هستند، پس بایکدیگر برابرند.



۲ــ در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم‌اندازه‌اند.

الف) وترهای EF و GH و پاره‌خط EH را رسم کنید.

ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

$\widehat{EG}=\widehat{FH}\Rightarrow\frac{\widehat{EG}}{۲}=\frac{\widehat{FH}}{۲}\xrightarrow{\text{زاویه محاطی}}\widehat{EHG}=\widehat{FEH}$

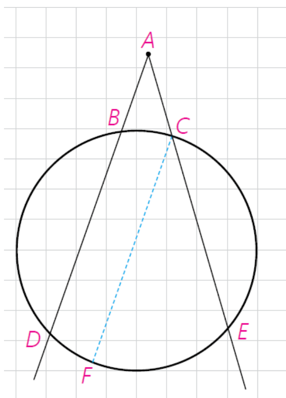
پ) خطوط EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

باهم موازی هستندبنا بر عکس قضیه خطوط موازی

نتیجه

دو وتر از یک دایره موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.

تاکنون زاویه‌هایی که رأس آنها بر روی دایره باشد را بررسی کردیم و رابطهٔ اندازه این زاویه‌ها با اندازهٔ کمان‌های ایجاد شده توسط آنها را مشخص کردیم. حال به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی که رأس آنها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند می‌پردازیم.



فعالیت

۱ــ فرض کنید رأس زاویهٔ DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده باشد و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویهٔ موردنظر مشخص شده باشند.

ــ از نقطهٔ C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE}=\widehat{FCE}=\frac{۱}{۲}\widehat{FE}=\frac{۱}{۲}(\widehat{DE}-\widehat{DF})=\frac{۱}{۲}(\widehat{DE}-\widehat{BC})$$

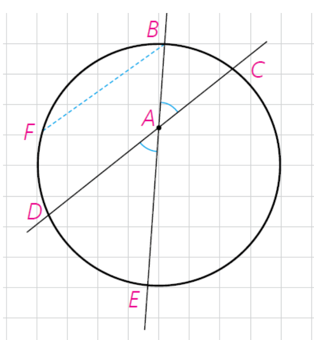
CF || AD و AE مورب بنا بر قضیه خطوط موازی $D\hat{A}E = F\hat{C}E$

زاویه $F\hat{C}E$ محاطی است پس نصف کمان مقابل است یعنی $F\hat{C}E=\frac{۱}{۲}\widehat{EF}$.

باتوجه به شکل $F\hat{C}E=\frac{۱}{۲}\widehat{EF}=\frac{۱}{۲}(\widehat{DE}-\widehat{BC})$

بنا بر فعالیت قبل بند (۱) می دانیم $\widehat{BC}=\widehat{DF}$

پس داریم : $D\hat{A}E=F\hat{C}E=\frac{۱}{۲}\widehat{EF}=\frac{۱}{۲}(\widehat{DE}-\widehat{BC})=\frac{۱}{۲}(\widehat{DE}-\widehat{BC})$



۲ــ رأس زاویهٔ DAE مانند شکل مقابل در درون دایره می‌باشد و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.

ــ از نقطهٔ B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE}=\widehat{FBE}=\frac{۱}{۲}\widehat{FE}=\frac{۱}{۲}(\widehat{FD}+\widehat{DE})=\frac{۱}{۲}(\widehat{BC}+\widehat{DE})$$

BF || DC و BE مورب بنا بر قضیه خطوط موازی $D\hat{A}E = F\hat{B}E$

زاویه $F\hat{B}E$ محاطی است پس نصف کمان مقابل است یعنی $F\hat{B}E=\frac{۱}{۲}\widehat{EF}$.

باتوجه به شکل: $F\hat{B}E=\frac{۱}{۲}\widehat{EF}=\frac{۱}{۲}(\widehat{FD}+\widehat{DE})$

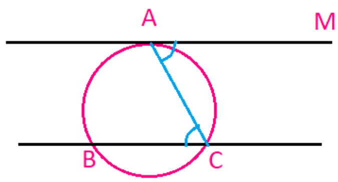
بنا بر فعالیت قبل بند (۱) می دانیم: $\widehat{BC}=\widehat{DF}$

پس داریم : $D\hat{A}E=F\hat{B}E=\frac{۱}{۲}\widehat{EF}=\frac{۱}{۲}(\widehat{FD}+\widehat{DE})=\frac{۱}{۲}(\widehat{BC}+\widehat{DE})$

تمرین

۱ــ در شکل‌های زیر ثابت کنید :

راهنمایی: از نقطهٔ B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.

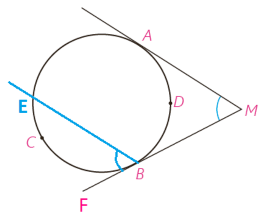


ثابت می شود که کمان های محصور بین یک مماس و وتر موازی در یک دایره باهم برابرند.

در شکل مقابل بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{MAC}=\widehat{BCA}$:

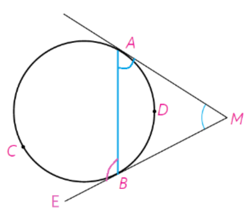
$$\left.\begin{array}{ll}\text{ظلّی} & \widehat{MAC}=\frac{۱}{۲}\widehat{AC}\\ \text{محاطی} & \widehat{ACB}=\frac{۱}{۲}\widehat{AB}\end{array}\right\}\xrightarrow{\widehat{MAC}=\widehat{ACB}}\frac{۱}{۲}\widehat{AC}=\frac{۱}{۲}\widehat{AB}\Rightarrow\widehat{AC}=\widehat{AB}$$

الف) $\hat{M}=\dfrac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{۲}$



راه اول : بنا برقضیه خطوط موازی $\widehat{AMB}=\widehat{EBF}$

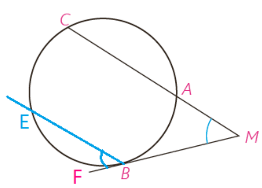
$$\widehat{AMB}=\widehat{EBF}=\frac{\widehat{EB}}{۲}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{AE}}{۲}\xrightarrow{\widehat{AE}=\widehat{ADB}}\widehat{AMB}=\widehat{EBF}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{۲}$$



راه دوم : از نقطه ی A به B وصل می کنیم . در مثلث AMB زاویه $E\hat{B}A$ خارجی است پس :

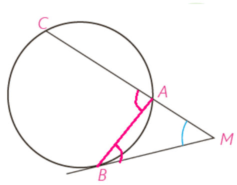
$$E\hat{B}A=M\hat{A}B+\hat{M}\Rightarrow\hat{M}=\underset{\text{ظلّی}}{E\hat{B}A}-\underset{\text{ظلّی}}{M\hat{A}B}\Rightarrow\hat{M}=\frac{۱}{۲}\widehat{ACB}-\frac{۱}{۲}\widehat{ADB}\Rightarrow\hat{M}=\frac{(\widehat{ACB}-\widehat{ADB})}{۲}$$

ب) $\hat{M}=\dfrac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{۲}$



راه اول : بنا برقضیه خطوط موازی $\widehat{CMB}=\widehat{EBF}$

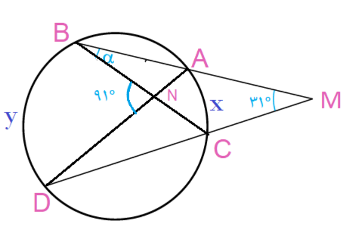
$$\widehat{CMB}=\widehat{EBF}=\frac{\widehat{EB}}{۲}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{CE}}{۲}\xrightarrow{\widehat{CE}=\widehat{AB}}\widehat{CMB}=\widehat{EBF}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{۲}$$



راه دوم : از نقطه ی A به B وصل می کنیم . در مثلث AMB زاویه $B\hat{A}C$ خارجی است پس :

$$\widehat{BAC}=\widehat{MBA}+\hat{M}\Rightarrow\hat{M}=\underset{\text{محاطی}}{\widehat{BAC}}-\underset{\text{ظلّی}}{\widehat{MBA}}\Rightarrow\hat{M}=\frac{۱}{۲}\widehat{BC}-\frac{۱}{۲}\widehat{AB}\Rightarrow\hat{M}=\frac{(\widehat{BC}-\widehat{AB})}{۲}$$

۲ــ در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

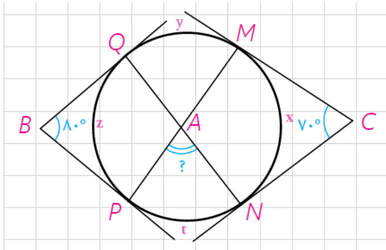


$$\hat{M}=\frac{y-x}{۲}\Rightarrow ۲\times ۳۱^\circ=y-x$$

$$\hat{N}=\frac{y+x}{۲}\Rightarrow ۲\times ۹۱^\circ=y+x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y-x=۶۲^\circ\\ y+x=۱۸۲^\circ\end{cases}\Rightarrow ۲y=۲۴۴^\circ\Rightarrow y=۱۲۲^\circ\Rightarrow x=۶۰^\circ$$

۳ــ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟



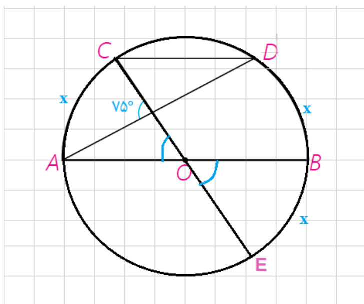
$$۷۰^\circ=\frac{(y+z+t)-x}{۲}\Rightarrow ۱۴۰^\circ=(y+z+t)-x$$

$$۸۰^\circ=\frac{(y+x+t)-z}{۲}\Rightarrow ۱۸۰^\circ=(y+x+t)-z$$

$$\begin{cases}۱۴۰^\circ=y+z+t-x\\ ۱۶۰^\circ=y+x+t-z\end{cases}\Rightarrow ۳۰۰^\circ=۲(y+t)\Rightarrow y+t=۱۵۰^\circ$$

$$\hat{A}=\frac{y+t}{۲}\Rightarrow \hat{A}=\frac{۱۵۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

۴ــ در شکل، O مرکز نیم‌دایره است و CD||AB اندازه کمان CD را به‌دست آورید.

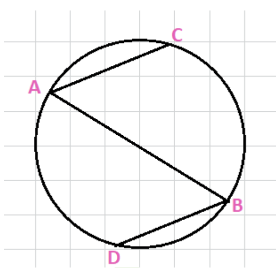


$$۷۵^\circ=\frac{(x+x)+x}{۲}\Rightarrow ۱۵۰^\circ=۳x\Rightarrow x=۵۰^\circ$$

$$\overparen{CD}=۱۸۰^\circ-۲x\Rightarrow \overparen{CD}=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ$$

۵ــ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.

ثابت کنید: AC = BD

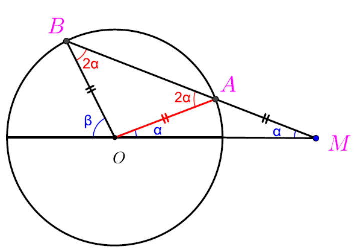


$$AC\parallel BD\Rightarrow \overparen{AD}=\overparen{BC}$$

$$\overparen{ACB}=\overparen{ADB}=۱۸۰^\circ$$

$$\overparen{ACB}-\overparen{BC}=\overparen{ADB}-\overparen{AD}\Rightarrow \overparen{AC}=\overparen{BD}\Rightarrow AC=BD$$

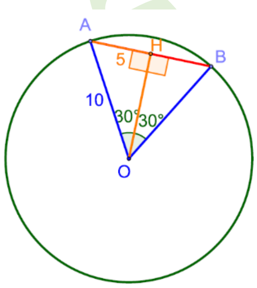
۶ــ دایرهٔ C(O,R) مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و MA = R؛ نشان دهید: $\beta=۳\alpha$



با توجه به فرض مسئله، مثلث های OAM و OAB متساوی الساقین هستند.

در مثلث OBM داریم: $\beta=۲\alpha+\alpha=۳\alpha$

۷ــ در دایرهٔ C(O,R)، $\overparen{AB}=۶۰^\circ$ و AB = ۱۰ فاصلهٔ O از وتر AB را به دست آورید.



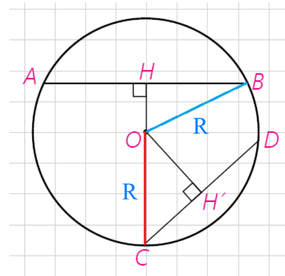
می دانیم که مثلث OAB متساوی الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله ی وتر از مرکز باید نقطه ی O بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر وتر را نصف می کند بنا بر این AH=۵ پس در مثلث قائم الزاویهٔ OAH داریم:

$$OH=\sqrt{OA^۲-AH^۲}\Rightarrow OH=\sqrt{۱۰^۲-۵^۲}=\sqrt{۷۵}=۵\sqrt{۳}$$

۸ــ در دایرهٔ $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$
(OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.)

راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کنید.

فرض: $AB > CD$ حکم: $OH < OH'$



$$OB = OC = R \quad , \quad BH = \frac{AB}{۲} \quad , \quad CH = \frac{CD}{۲} \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{OBH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow BH^۲ = R^۲ - OH^۲$$

$$\overset{\Delta}{OCH'} : H' = ۹۰^\circ \Rightarrow CH'^۲ = R^۲ - OH'^۲$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{۲} > \frac{CD}{۲} \xrightarrow{(۱)} BH > CH' \Rightarrow BH^۲ > CH'^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - OH^۲ > R^۲ - OH'^۲ \Rightarrow -OH^۲ > -OH'^۲ \xrightarrow{\times(-۱)} OH^۲ < OH'^۲ \xrightarrow[OH'>۰]{OH>۰} OH < OH'$$

فرض: $OH < OH'$ حکم: $AB > CD$

$$OB = OC = R \quad , \quad ۲BH = AB \quad , \quad ۲CH = CD \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{OBH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow OH^۲ = R^۲ - BH^۲$$

$$\overset{\Delta}{OCH'} : H' = ۹۰^\circ \Rightarrow OH'^۲ = R^۲ - CH'^۲$$

$$OH < OH' \Rightarrow R^۲ - BH^۲ < R^۲ - CH'^۲$$

$$\Rightarrow -BH^۲ < -CH'^۲ \xrightarrow{\times(-۱)} BH^۲ > CH'^۲ \xrightarrow[CH'>۰]{BH>۰} BH > CH' \xrightarrow{(۱)} AB > CD$$

درس دوم

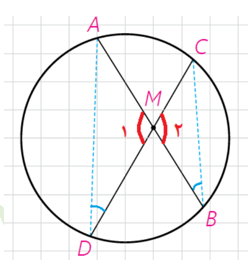
رابطه‌های طولی در دایره

اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی نباشند، یکدیگر را برون یا روی یا درون دایره قطع می‌کنند. در هر حالت به بررسی روابط بین اندازه پاره‌خط‌های حاصل می‌پردازیم.

فعالیت

۱ــ دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه‌اند.

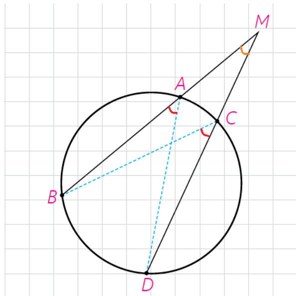


این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ \hat{D} = \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{CMB}$$

ب) با توجه به تشابه دو مثلث مذکور داریم: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$

۱ و در نتیجه: $AM.BM = CM.DM$



۲ــ دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) نقطهٔ A را به D و نقطهٔ C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MCB باهم متشابه‌اند.

این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

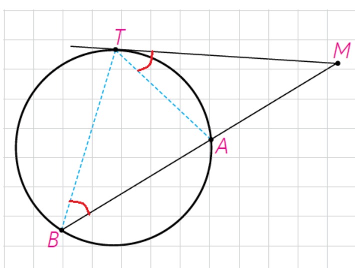
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}=\hat{M}\\ \hat{A}=\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AMD}\cong\overset{\Delta}{CMB}$$

ب) با توجه به تشابه فوق داریم : $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{MD}{MB}$

۲ و در نتیجه: $MA.MB=MC.MD$

نتیجه ۱ و ۲

هرگاه وترهای AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه: $MA.MB=MC.MD$



۳ــ فرض کنیم از نقطهٔ M (خارج دایره) مانند شکل یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم.

الف) T را به A و B وصل نمایید و مشخص کنید چرا $M\hat{T}A=T\hat{B}M$؟

$$\left.\begin{array}{l}\text{ظلّی}\quad M\hat{T}A=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{۲}\\ \text{محاطی}\quad T\hat{B}M=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow M\hat{T}A=T\hat{B}M$$

ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص کنید و با توجه به این تشابه رابطهٔ زیر را کامل نمایید.

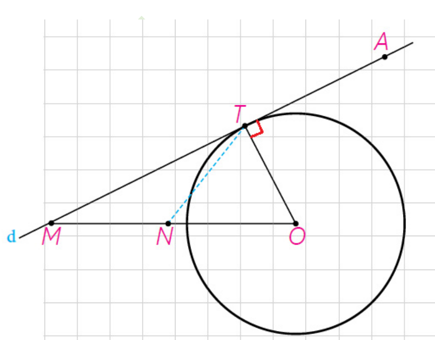
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}=\hat{M}\\ M\hat{T}A=T\hat{B}M\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{MTB}\cong\overset{\Delta}{MAT}$$ این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\frac{MA}{MT}=\frac{MT}{MB}$$

و در نتیجه : $MT^{۲}=MA\ .\ MB$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

اگر خط d در نقطهٔ T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d در دوطرف نقطهٔ T باشند، هرکدام از پاره‌خط‌های MT و AT بر دایره مماس‌اند.

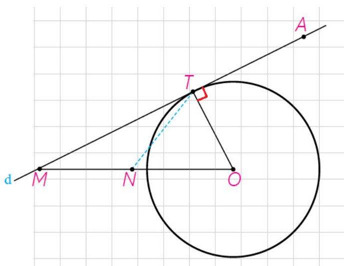


اگر O مرکز دایره باشد، ΔOMT دررأس T قائم‌الزاویه است. چرا؟

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

با توجه به کادر فوق چون طبق فرض خط d در نقطهٔ T بر دایره مماس است پس $OT \perp d$ در نتیجه مثلث OMT در رأس T قائم الزاویه است .

اگر N وسط پاره خط OM باشد در نتیجه TN میانه ی مثلث قائم الزاویه OMTاست .« در هر مثلث قائم الزاویه اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر نصف اندازهٔ وتر است.»(صفحه ۶۰ کتاب هندسه دهم) . بنا براین $MN = NO = TN$.

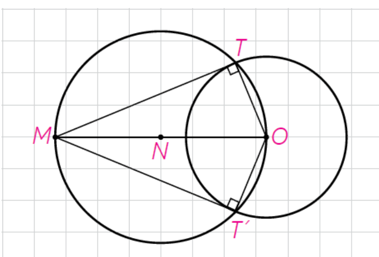


بنابراین دایره به مرکز Nو قطر OM از نقطه T می‌گذرد.

از این ویژگی می‌توانیم در رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره بر آن استفاده کنیم.

اگر فاصله M تا O (مرکز دایره) d باشد، $MT = \sqrt{d^2 - R^2}$ چرا؟

$$M\overset{\Delta}{T}O : \hat{T} = 90^\circ \Rightarrow MT^2 = OM^2 - OT^2 \Rightarrow MT = \sqrt{d^2 - R^2}$$



اکنون برای رسم مماس بر دایره از نقطهM خارج دایره، ابتدا دایره‌ای به قطر OM (O مرکز دایره) رسم می‌کنیم.

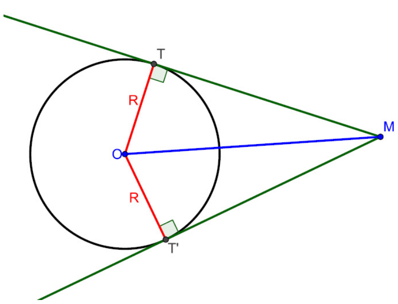
این دایره، دایره مفروض را در دو نقطه T و T' قطع می‌کند. خط‌های MT و MT' بر دایره مماس‌اند چرا؟

زاویه های $M\hat{T}O$ و $M\hat{T}'O$ محاطی روبه رو به قطر هستند بنا براین اندازه ی هرکدام 90° است . پس شعاع نقطهٔ تماس بر پاره خط های MT و MT' عمود است .

درنتیجه MT و MT' بر دایره مماس هستند.

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

کاردرکلاس



هرگاه از نقطه M خارج دایره C(O,R) دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند، ثابت کنید :

الف) اندازه‌های دو مماس برابرند.

دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم همنهشت هستند. و بنا براجزای متناظر $MT = MT'$.

ب) نیم‌خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

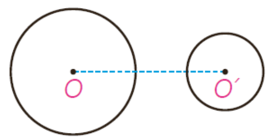
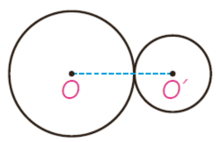
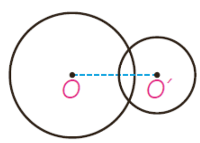
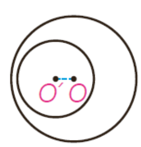
راه اول : دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم همنهشت هستند. و بنا براجزای متناظر $O\hat{M}T = O\hat{M}T'$.

راه دوم : فاصلهٔ نقطهٔ O از دوضلع زاویه TMT' به یک فاصله است پس بنا بر خاصیت نیمساز زاویه نقطهٔ O روی نیمساز این زاویه است. یعنی نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

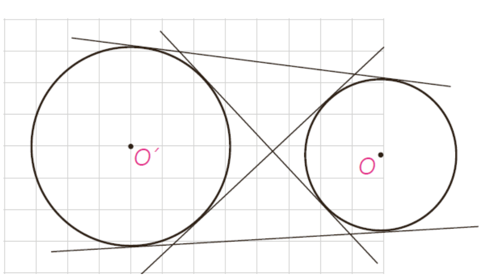
حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ درنظر می‌گیریم.

حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به‌صورت زیر است :

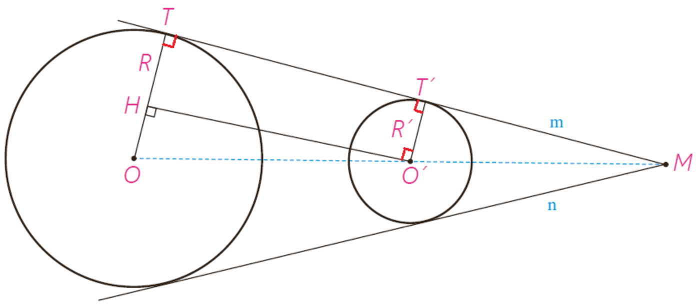
دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = 0$	

هر خطی یا پاره‌خطی را که بر هردو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره می‌نامند.



فعالیت

۱ــ فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاع‌های OT و $O'T'$ رسم شده‌است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O' خطی موازی خط m رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع کند.



شعاع های OT و $O'T'$ بر خط m در نقاط T و T' عمودند. و چون $O'H$ موازی خط m است پس بنا بر قضیه خطوط موازی $\hat{T}'=\hat{O}'=90^\circ$ و $\hat{T}=\hat{H}=90^\circ$

بنا بر این چهار ضلعی $TT'O'H$ چهار زاویه قائمه دارد پس مستطیل است .

ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$، تساوی زیر را توجیه کنید.

$$TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

$OO'=d$ و $OT=R$ و $O'T'=R'$ و با توجه به بند الف $O'H=TT'$

$$\overset{\Delta}{OO'H}:\hat{H}=90^\circ \Rightarrow O'H^2+OH^2=OO'^2 \Rightarrow O'H^2=OO'^2-OH^2$$

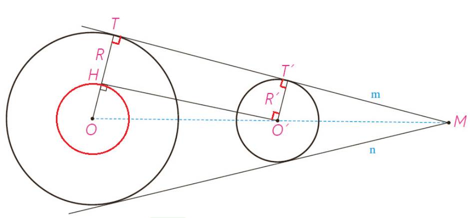
$$\Rightarrow O'H=\sqrt{d^2-(OT-OT')^2}\xrightarrow[OT=R,\,O'T'=R']{O'H=TT'}TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

پ) با توجه به کار در کلاس قبل بگویید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع باشند، نقطهٔ تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

فرض کنیم این دو مماس مشترک در نقطه ی M یکدیگر را قطع کنند. با توجه به بند (ب) کار در کلاس قبل $O'M$ نیمساز زاویه M است . همچنین OM هم نیمساز زاویه M است و چون هر زاویه یک نیمساز دارد در نتیجه OM و $O'M$ بر هم منطبق هستند در نتیجه نقطهٔ تقاطع مماس ها روی خط OO' قرار دارد.

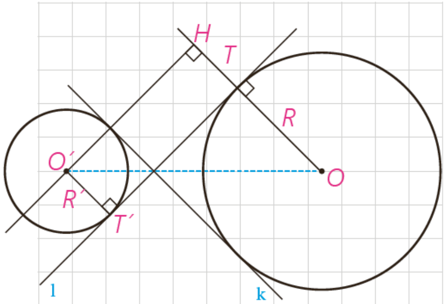
ت) به مرکز O و به شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم کنید. پاره‌خط $O'H$ برای دایرهٔ رسم شده چگونه خطی است؟

پاره خط $O'H$ بر این دایره مماس است .



ث) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد. از آنجا که مرکزها و شعاع‌های دو دایره معلوم است، می‌توان دایرهٔ مطرح شده در قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛ در این‌صورت چگونه می‌توانید مماس TT' را رسم کنید؟

از نقطهٔ O به H وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا دایرهٔ (C) را در نقطهٔ T قطع کند. سپس از این نقطه خطی موازی $O'H$ رسم می کنیم. این خط در نقطهٔ T' بر دایرهٔ (C') مماس می شود.



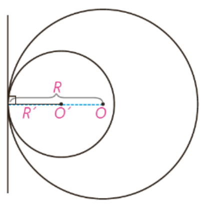
۲ــ دو مماس مشترک l و k نیز بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده‌است مرکزهای دو دایره در دوطرف مماس مشترک‌اند. با به‌کار بردن قضیه فیثاغورس در $\Delta O'OH$ مانند قبلی نشان دهید :

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$$

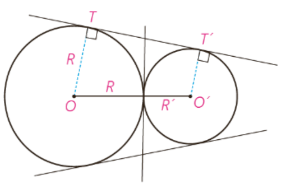
با توجه به شکل چهارضلعی $THO'T'$ مستطیل است پس $TT' = OH$. همچنین $TH = O'T' = R'$ و در نتیجه : $OH = R + R'$.

$$O'\overset{\Delta}{O}H : H = ۹۰^{\circ} \Rightarrow O'H^{۲} = OO'^{۲} - OH^{۲} \xrightarrow[OH = R + R',\, OO' = d]{TT' = O'H} TT' = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$$

۳ــ دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می‌نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دوطرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می‌نامند.



مماس داخل‌اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.
$OO' = |R - R'|$



مماس خارج‌اند؛
سه مماس مشترک دارند.
$OO' = R + R'$

با استفاده از دستور محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره مماس خارج، $TT' = ۲\sqrt{RR'}$

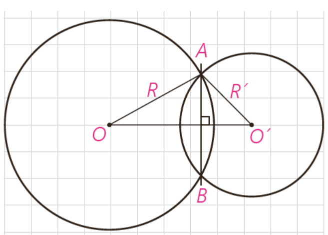
$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}} \xrightarrow{d = R + R'} TT' = \sqrt{(R + R')^{۲} - (R - R')^{۲}}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{R^{۲} + R'^{۲} + ۲RR' - (R^{۲} + R'^{۲} - ۲RR')} = \sqrt{R^{۲} + R'^{۲} + ۲RR' - R^{۲} - R'^{۲} + ۲RR'}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{۴RR'} \Rightarrow TT' = ۲\sqrt{RR'}$$

۴ــ دو دایره متقاطع. دو دایره را که فقط دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می‌نامند. در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند.

و $|R - R'| < OO' < R + R'$ ؛ چرا؟



با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AOO' داریم:

$$OO' < R + R' \quad (۱)$$

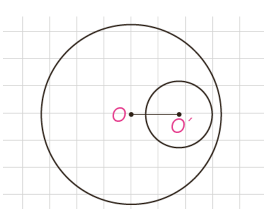
$$\left.\begin{array}{l} R' < OO' + R \Rightarrow -OO' < R - R' \\ R < OO' + R' \Rightarrow R - R' < OO' \end{array}\right\} \Rightarrow -OO' < R - R' < OO' \Rightarrow |R - R'| < OO' \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} |R - R'| < OO' < R + R'$$

پاره‌خط AB، که دوسر آن روی هر دو دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع است. چرا پاره‌خط OO' عمودمنصف وتر مشترک AB است؟

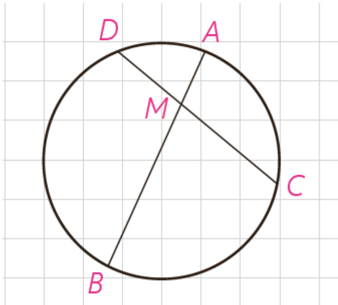
$OA = OB = R$ و $O'A = O'B = R'$ بنا بر خاصیت عمودمنصف نقاط O و O' روی عمود منصف AB قرار دارد و چون عمود منصف هر پاره خط یکتا است در نتیجه پاره خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است.

۵ ــ دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می‌نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها $OO' < |R - R'|$



$OO' < |R - R'|$

تمرین



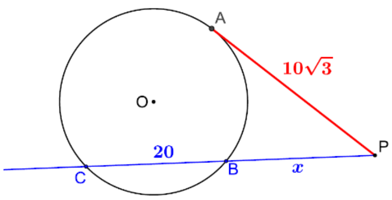
۱ــ در دایرهٔ C(O,R) وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر AB = ۱۱cm، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

$$\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{DM}{DC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{DM}{۹}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow DM=۳\Rightarrow MC=۶$$

$$DM.MC=AM.BM\xrightarrow{AM=x}۳\times۶=x(۱۱-x)\Rightarrow x^۲-۱۱x+۱۸=۰$$

$$\Rightarrow(x-۹)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\quad,\ x=۹$$ باتوجه به شکل غ ق ق

$$\Rightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۹}$$

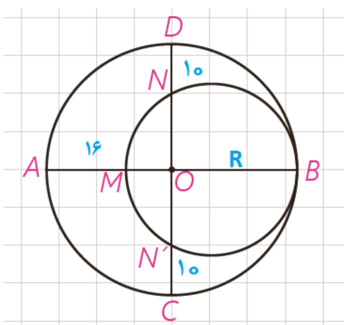


۲ــ از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و BC = ۲۰ . طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.

$$PA^۲=PB.PC\rightarrow(۱۰\sqrt{۳})^۲=x(x+۲۰)\Rightarrow x^۲+۲۰x-۳۰۰=۰$$

$$\Rightarrow(x-۱۰)(x+۳۰)=۰\Rightarrow x=۱۰\quad,\quad x=-۳۰$$ غ ق ق

$$\Rightarrow PB=۱۰\ ,\ PC=۳۰$$



۳ــ در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر برهم عمودند. اگر AM = ۱۶ و ND = ۱۰، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.

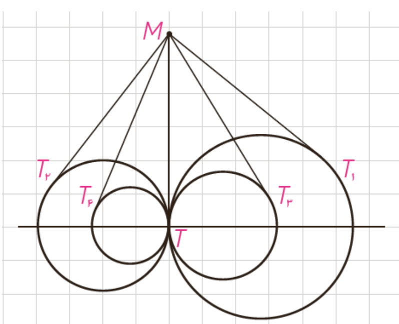
$$OB.OM=ON.ON'\Rightarrow R(R-۱۶)=(R-۱۰)(R-۱۰)$$

$$\Rightarrow R^۲-۱۶R=R^۲-۲۰R+۱۰۰\Rightarrow ۴R=۱۰۰\Rightarrow R=۲۵$$

$$R'=\frac{MB}{۲}\Rightarrow R'=\frac{۲R-۱۶}{۲}\Rightarrow R'=\frac{۵۰-۱۶}{۲}=۱۷$$

۴ــ مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

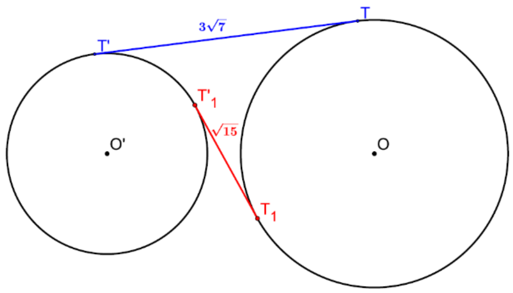
$$MT_۱=MT_۲=MT_۳=MT_۴=\dots$$



با توجه به کار درکلاس ص ۱۲ می دانیم که از هر نقطه خارج دایره طول مماس های رسم شده باهم برابرند. بنابراین داریم :

$$\left.\begin{array}{l}MT=MT_۲\\MT=MT_۴\\MT=MT_۱\\MT=MT_۲\end{array}\right\}\Rightarrow MT=MT_۱=MT_۲=MT_۳=MT_۴$$

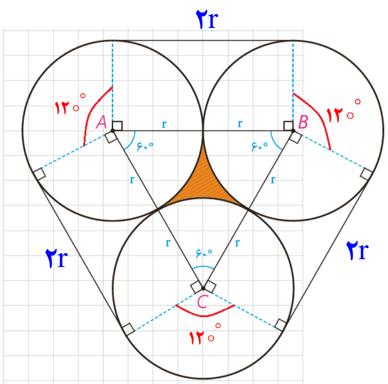
۵ــ طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به‌دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.



$$\begin{cases} TT'^{۲} = d^{۲} - (R - R')^{۲} \\ TT'^{۲} = d^{۲} - (R + R')^{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^{۲} \\ ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = ۱ \\ R + R' = ۷ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴ \Rightarrow R' = ۳$$

۶ــ سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۶r + ۲\pi r$. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^{۲}(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$ محدود است.



مجموع سه قطاع با زاویهٔ ۱۲۰ درجه تشکیل یک دایره کامل می دهد بنا براین داریم :

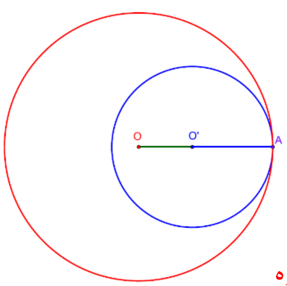
طول نخ $= ۲r + ۲r + ۲r +$ محیط یک دایره $= ۶r + ۲\pi r$

مجموع سه قطاع با زاویه ۶۰درجه تشکیل یک نیم دایره می دهد بنا بر این داریم :

مساحت نیم دایره- مساحت مثلث ABC = مساحت ناحیه هاشور خورده

مساحت ناحیه هاشور خورده $= \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^{۲} - \frac{\pi r^{۲}}{۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۴}r^{۲} - \frac{\pi r^{۲}}{۲} = r^{۲}(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$

۷ــ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آنها ۱۶π سانتی‌مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.



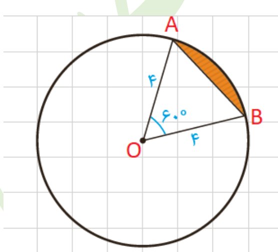
با توجه به شکل $OA = R$ و $O'A = R'$ در نتیجه :

مساحت ناحیه محدود بین دودایره $= \pi R^{۲} - \pi R'^{۲} = ۱۶\pi \Rightarrow R^{۲} - R'^{۲} = ۱۶ \Rightarrow (R - R')(R + R') = ۱۶$

$$\xrightarrow{OO' = R - R' = ۲} ۲(R + R') = ۱۶ \Rightarrow R + R' = ۸$$

$$\begin{cases} R + R' = ۸ \\ R - R' = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۱۰ \Rightarrow R = ۵ \;,\; R' = ۳$$

۸ــ مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.



مثلث OAB متساوی الساقین است که و $\hat{O} = ۶۰^{\circ}$ پس این مثلث متساوی الاضلاع است.

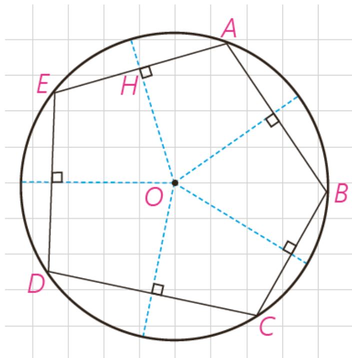
مساحت مثلث OAB − مساحت قطاع ۶۰ درجه =مساحت قسمت رنگی (A)

$$A = \frac{\pi r^{۲}}{۳۶۰}\alpha - \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times r^{۲} \Rightarrow A = \frac{۱۶\pi}{۳۶۰} \times ۶۰ - ۴\sqrt{۳} = \frac{۸}{۳}\pi - ۴\sqrt{۳}$$

درس سوم

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

چند ضلعی را **محاطی** می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را **دایرهٔ محیطی آن چند ضلعی** می‌نامیم.



به‌طور مثال ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است.

می‌دانیم برای اینکه دایره‌ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز آن روی عمود منصف پاره‌خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن است؛ بنابراین :

> یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رأس باشند.

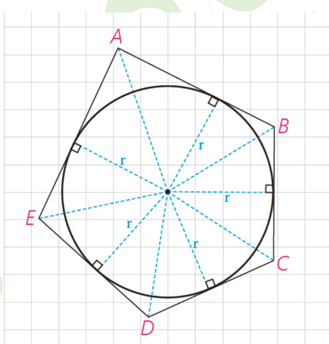
چرا؟ این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.

فرض : چند ضلعی محاطی است .   حکم : عمود منصف ها ی همه ی ضلع ها ی آن در یک نقطه همرسند.

باتوجه به تعریف چند ضلعی محاطی و فرض واضح است که فاصله ی همهٔ رأس های چند ضلعی تا مرکز دایره به یک اندازه است (شعاع دایره) در نتیجه بنا برخاصیت عمود منصف فاصلهٔ مرکز دایره از دوسر هر ضلع به یک فاصله (شعاع دایره) است ، پس مرکز دایره روی عمود منصف این اضلاع قرار دارد.در نتیجه عمود منصف ها ی همه ی ضلع ها ی آن در یک نقطه(مرکز دایره) همرسند.

فرض : عمود منصف ها ی همه ی ضلع ها ی چندضلعی در یک نقطه همرسند.   حکم : چند ضلعی محاطی است .

باتوجه به فرض و خاصیت عمود منصف همه ی رأس های چند ضلعی از نقطه ی همرسی عمود منصف ها به یک فاصله اند و در نتیجه این نقاط بنا بر تعریف دایره ، روی دایره ای به شعاع این فاصله ی ثابت قرار دارند و بنا بر تعریف چند ضلعی محاطی این چند ضلعی محاطی است .

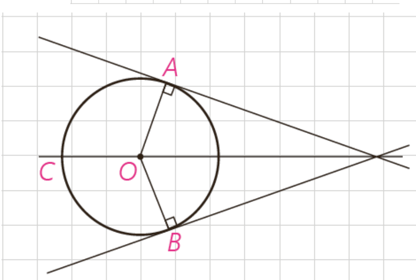


چند ضلعی را **محیطی** می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را **دایرهٔ محاطی این چند ضلعی** می‌نامیم.

فعالیت

فرض کنید دایرهٔ C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.

الف)



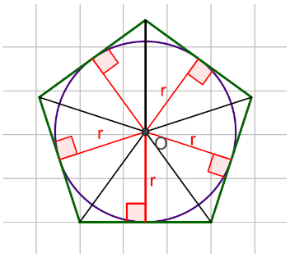
۱ــ پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اضلاع با دایره وصل می‌کند، رسم کنید و آنها را OB و OA بنامید.

۲ــ پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی است؟

شعاع های دایره اند.

۳ــ فاصلهٔ نقطهٔ O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟

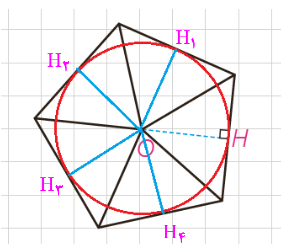
باهم برابرند . زیرا شعاع نقطه تماس بر خط مماس عمود است .



۴ــ با توجه به (۲) و (۳) فاصلهٔ مرکز دایره از دو ضلع زاویه به.یک فاصله.است**و بنابراین نقطهٔ O روی** نیمسلز.زاویه. است.

۵ــ فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چند ضلعی محاط شده باشد. چرا مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی چند ضلعی است؟

بنا به تعریف چند ضلعی محاطی ، اضلاع چند ضلعی بر دایره مماس هستند و می دانیم شعاع درنقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است ، پس این شعاع ها همان فاصله ی مرکز دایره از اضلاع چند ضلعی هستند و همگی با هم برابرند . بنا برخاصیت نیمساز مرکز این دایره روی نیمساز هر یک از زاویه های داخلی چند ضلعی است به عبارتی مرکز دایره محل برخورد نیمساز های داخلی چند ضلعی است.



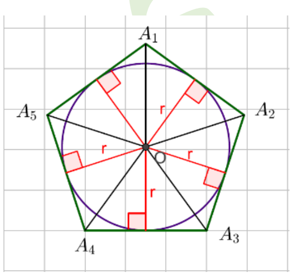
ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای زوایای داخلی آن در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره خط عمود به یک ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه نوع دایره‌ای است؟ چرا؟

نقطهٔ O روی نیمساز زوایای داخلی است پس بنا بر خاصیت نیمساز ها: $OH = OH_۱ = OH_۲ = OH_۳ = OH_۴$

همچنین $OH_۱$ و $OH_۲$ و $OH_۳$ و $OH_۴$ همگی بر اضلاع عمود هستند. در نتیجه وقتی دایره ای به شعاع OH رسم می کنیم شعاع ها بر اضلاع عمود هستند پس اضلاع بر دایره در نقطهٔ تماسشان عمودند یعنی دایره بر اضلاع چندضلعی مماس است در نتیجه بنا به تعریف دایره محاطی است.

بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند.این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

کاردرکلاس



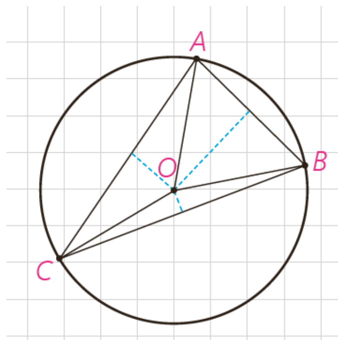
اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید S=rp .

راهنمایی: کافی است مساحت n مثلث را محاسبه، و با هم جمع کنید.

$$S=\frac{۱}{۲}r.A_۱A_۲+\frac{۱}{۲}r.A_۲A_۳+\frac{۱}{۲}r.A_۳A_۴+\frac{۱}{۲}r.A_۴A_۵+....+\frac{۱}{۲}r.A_{n-۱}A_n$$

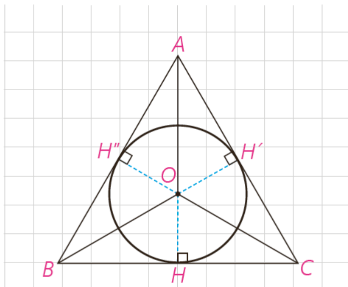
$$=\frac{۱}{۲}r(A_۱A_۲+A_۲A_۳+...+A_{n-۱}A_n)=\frac{۱}{۲}r\times ۲P\Rightarrow S=rp$$

دایره‌های محیطی و محاطی مثلث



$OA=OB=OC=R$

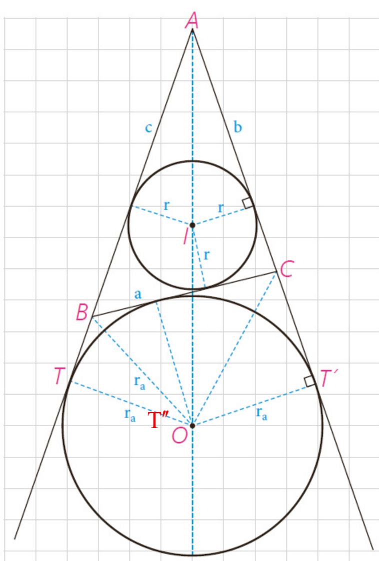
قبلاً همرسی سه عمود منصف یک مثلث را ثابت کرده‌ایم؛ بنابراین نقطه همرسی سه عمود منصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است.



$OH=OH'=OH''=r$

همچنین ثابت کرده‌ایم سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث همرس‌اند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز هست. بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه همرسی سه نیمساز است و شعاع این دایره، که آن را با r نشان می‌دهیم، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است. بنابر آنچه در مورد n ضلعی‌های محیطی نشان دادیم در مثلث نیز $S=pr$ که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.



اگر نیمساز زاویه A از ΔABC را رسم کنیم، نیمساز زاویه خارجی C را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. این نقطه از خط BC و خط‌های AC و AB به یک فاصله است؛ چرا؟

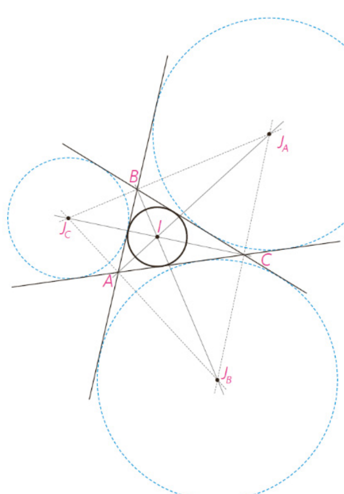
نقطهٔ O روی نیمساز زاویه A است پس $OT = OT'$ (۱)

نقطهٔ O روی نیمساز زاویهٔخارجی C است پس $OT'' = OT'$ (۲)

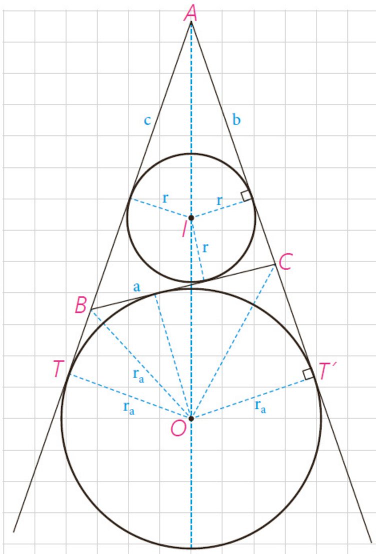
از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که : $OT'' = OT$ پس نقطهٔ O روی نیمساز زاویهٔ خارجی B نیز هست . به عبارتی این نقطه از خط BC و خط های AC و AB به یک فاصله است.

بنابراین O نیز مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند.

شعاع این دایره را با r_a نشان می‌دهند؛ به همین ترتیب دو دایره محاطی خارجی دیگر نظیر دو رأس B و C وجود دارد.



اکنون در فعالیت زیر محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی را بررسی می‌کنیم.



در شکل داریم: $S(ABC)=S(OAC)+S(OAB)-S(OBC)$ اگر مساحت ΔABC را به S نشان دهیم، $S=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$. اگر محیط مثلث را با $2p$ نشان دهیم، داریم، $2p=a+b+c$؛ پس $2p-2a=a+b+c-2a=b+c-a$

در نتیجه $S=r_a(P-a)$ و بنابراین $r_a=\frac{S}{p-a}$ و به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:

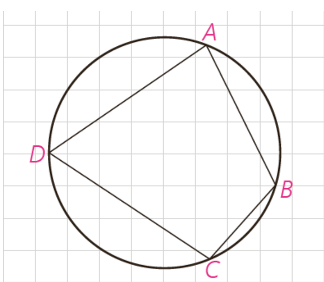
$r_b=\frac{S}{p-b}$ $\qquad$ $r_c=\frac{S}{p-c}$

برخلاف مثلث، همهٔ چند ضلعی‌های دیگر، لزوماً محاطی یا محیطی نیستند. در بخش بعد به شرایط محاطی یا محیطی بودن یک چهار ضلعی می‌پردازیم.

چهار ضلعی‌های محاطی و محیطی

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.

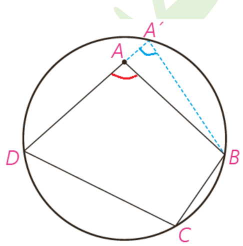
اثبات



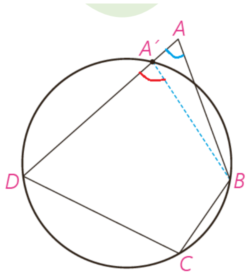
۱ــ فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی باشد؛ مجموع اندازه‌های $\hat{A}$, $\hat{C}$ نصف مجموع اندازه‌های کمان‌های DCB و DAB است؛ اما مجموع اندازه‌های این دو کمان 180° است و در نتیجه مجموع اندازه‌های $\hat{A}$, $\hat{C}$ برابر 180° است.
به همین ترتیب $\hat{B}$, $\hat{D}$ مکمل‌اند.

۲ــ فرض کنیم $\hat{A}$, $\hat{C}$ مکمل باشند. با برهان خلف ثابت می‌کنیم چهارضلعی ABCD محاطی است. از سه نقطه C،B و D همواره یک دایره می‌گذرد؛ چرا؟

زیرا عمود منصف های اضلاع یک مثلث همرسند و مرکز دایره ی محیطی هر چندضلعی نقطهٔ همرسی عمود منصف های اضلاع است.



اگر این دایره از A نگذرد، خط AD را در نقطه‌ای دیگری مانند A' قطع می‌کند که A' بین A و D یا A بین A' و D است. اکنون چهارضلعی $A'BCD$ محاطی است؛ پس $\hat{C}$ و $\widehat{BA'D}$ مکمل‌اند؛ در نتیجه باید $\hat{A}$ و $\widehat{BA'D}$ هم‌اندازه باشند و این ممکن نیست؛ چرا؟



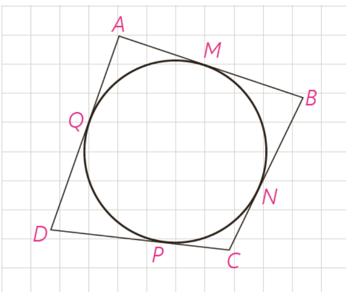
زیرا در هر مثلث هر زاویه خارجی از زاویه داخلی غیر مجاورش بزرگ تر است.

در نتیجه A' همان A است.

قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند.

اساس اثبات بر این است که اگر از نقطه‌ای بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم دو پاره خط مماس هم‌اندازه‌اند.

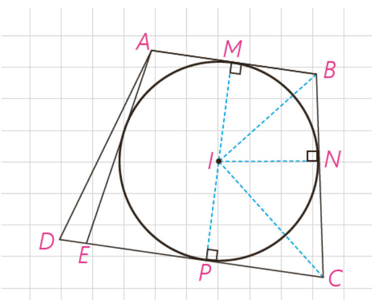
اثبات



۱ــ اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد،

$$AB+CD=AM+MB+PC+PD=AQ+BN+CN+DQ$$
$$=AQ+DQ+BN+CN=AD+BC$$

عکس این قضیه نیز با برهان خلف ثابت می‌شود.



۲ــ فرض کنید : AB+CD=BC+AD.

نیمسازهای دو زاویهٔ B و C همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، چرا نقطهٔ I از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است؟(IM=IN=IP)

نقطهٔ I روی نیمساز زاویهٔ B است پس $IM=IN$ (۱)

نقطهٔ I روی نیمساز زاویهٔ C است پس $IP=IN$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که : $IP=IN=IM$ پس نقطهٔ I از سه ضلع CD، BC و AB به یک فاصله است.

چرا دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM بر AB و BC و CD مماس است؟

زیرا این شعاع ها در نقاط اشتراک با دایره بر آن عمود هستند.

حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد، حکم ثابت شده است.

اما اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند؛ در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می‌شود.

پس، AB+EC=AE+BC ؛ (چرا؟)

چهار ضلعی ABCE محیطی است پس بنا بر بند (۱) همین قضیه نتیجه می گیریم : $AB+CE=AE+BC$

از این رابطه با استفاده از رابطه فرض چگونه نتیجه می گیرید : AD=DE+AE ؟

$$\left.\begin{aligned}AB+CD&=AD+BC\\AB+CE&=AE+BC\end{aligned}\right\}\Rightarrow CD-CE=AD-AE\Rightarrow CD-CE+AE=AD\Rightarrow DE+AE=AD$$

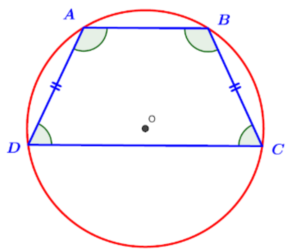
این رابطه امکان ندارد؛ (چرا؟)

بنا بر نامساوی مثلثی در مثلث ADE داریم : $DE+AE>AD$ پس رابطه ی فوق امکان ندارد؛مگر این که E همان D باشد.

پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.

کاردرکلاس

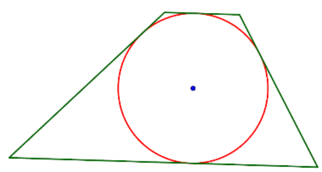
با توجه به این قضیه‌ها بررسی کنید که چهار ضلعی‌های ذوزنقه، کایت، متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع کدام محاطی، و کدام محیطی است. ذوزنقه متساوی‌الساقین چطور؟



ذوزنقه در حالت کلی محاطی نیست زیرا زوایای مقابل آن مکمل نیستند.

اما اگر ذوزنقه متساوی الساقین باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A}+\hat{C}=180^\circ \\ \hat{A}+\hat{D}=180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B}+\hat{D}=180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$ ذوزنقه ABCD محاطی است



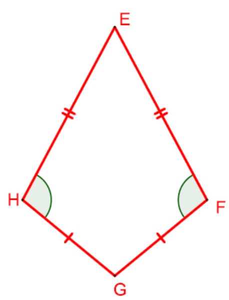
یک ذوزنقه در حالت کلی محیطی نسیت اما می تواند محیطی باشدبه شرط آن که نیمساز های داخلی همرس باشند.

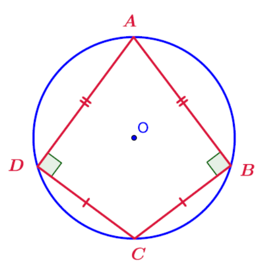
مانند شکل مقابل:

یک کایت در حالت کلی محاطی نیست ولی اگر دو زاویه مقابل آن قائمه باشند می تواند محاطی باشد.

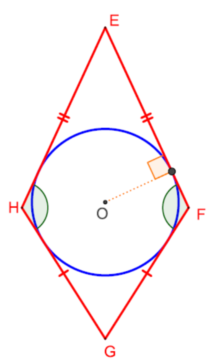
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ \xrightarrow{\hat{B}+\hat{D}=180^\circ} \hat{A}+\hat{C}=180^\circ$$

پس بنا برقضیه کایت ABCD محاطی است.



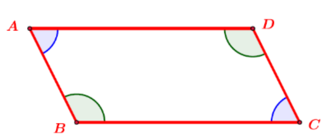


یک کایت حتما محیطی است زیرا مجموع اضلاع مقابل با هم برابرند.



$$\left.\begin{array}{l}EF=EH \\ GH=GF\end{array}\right\} \Rightarrow EF+GH=EH+GF$$

یک متوازی الاضلاع در حالت کلی محاطی نیست ؛ زیرا :

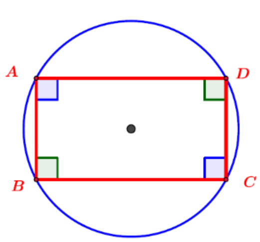


زاویه های مقابل نمی توانند مساوی 180° باشند.

$$\hat{A}+\hat{C}<180^\circ \ , \ \hat{B}+\hat{D}>180^\circ$$

یک متوازی الاضلاع در حالت کلی محیطی نیست؛ زیرا اضلاع مقابل دو به دو برابرند و مجموع آن ها با هم برابر نیست .

با توجه به شکل فوق : $AB+DC<AD+BC$.



یک مستطیل محاطی است ؛ زیرا مجموع زاویه های مقابل همیشه برابر با 180° است.

یک مستطیل محیطی نیست زیرا اضلاع مقابل برابرند و مجموع آن ها باهم برابر نیست

با توجه به شکل : $AB+DC<AD+BC$

یک لوزی محاطی نیست ؛ زیرا مجموع زاویه های مقابل 180° نیست .

یک لوزی محیطی است ؛ زیرا مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.

یک مربع هم می تواند محیطی و هم محاطی باشد. زیرا هم مجموع زاویه های مقابل 180° است و هم مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.

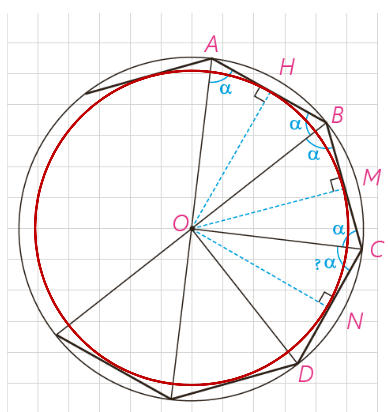
از دیگر چندضلعی‌های محاطی و محیطی، چند ضلعی‌های منتظم است.

یک چند ضلعی محدب را منتظم می‌نامند، هرگاه تمام ضلع‌های آن هم‌اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم‌اندازه باشند.

مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

در فعالیت زیر نشان می‌دهیم هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است :

فعالیت



فرض کنید اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم ...ABCD، 2α باشد؛ عمود منصف‌های دو ضلع AB و BC را رسم می‌کنیم. فرض کنیم در O متقاطع‌اند. بنابراین $OA=OB=OC$.

پس $\Delta OAB \cong \Delta OBC$ چرا؟

دو مثلث به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند.

$$\widehat{ABC}=\widehat{OBA}+\widehat{OBC} \xrightarrow{\widehat{OBA}=\widehat{OBC}} 2\alpha = 2\widehat{OBA}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\alpha$$

$$\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\alpha$$

اکنون از D به O وصل می‌کنیم. چرا اندازه $\widehat{OCD}$ برابر α است؟ چرا $\Delta OCD \cong \Delta OCB$؟ و $OA=OB=OC=OD$؟

$$\widehat{BCD}=\widehat{OCB}+\widehat{OCD} \Rightarrow 2\alpha=\alpha+\widehat{OCD} \Rightarrow \widehat{OCD}=\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} OC=OC \\ BC=DC \\ \widehat{OCD}=\widehat{OCB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OCD} \cong \overset{\Delta}{OCB} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} OD=OB$$

$$\left.\begin{array}{l} OD=OB \\ OA=OB=OC \end{array}\right\} \Rightarrow OA=OB=OC=OD$$

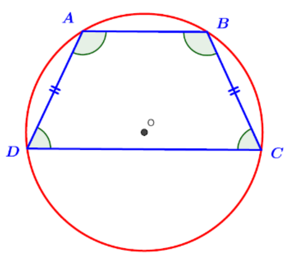
با ادامه این روند داریم :

$OA=OB=OC=OD=\cdots$ و $OH=ON=OM=\cdots$ بنابراین، O از همه رأس‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که از تمام رأس‌های n ضلعی منتظم می‌گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که بر تمام ضلع‌های n ضلعی منتظم مماس است.

تمرین

۱ــ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.



فرض : ذوزنقه متساوی الساقین است. حکم : ذوزنقه محاطی است.

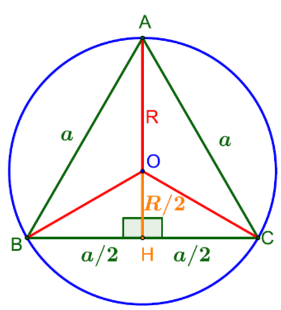
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \\ \hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$ ذوزنقه ABCD محاطی است

فرض : ذوزنقه محاطی است. حکم : ذوزنقه متساوی الساقین است.

$$AB \parallel DC\ ,\ AD \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \\ \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{D}=\hat{A}+\hat{C} \Rightarrow \hat{D}=\hat{C} \xrightarrow{\text{ق زاویه های مکمل}} \hat{A}=\hat{B}$$

در این ذوزنقه زاویه های مجاور به ساق برابرند درنتیجه ذوزنقه متساوی الساقین است .

۲ــ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.



مرکز دایره ی محیطی نقطهٔ O محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی الاضلاع است نقطهٔ O محل برخورد میانه هاهم هست. بنا براین :

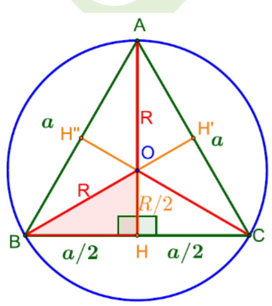
راه اول :

$$AB=BC=AC=a \quad , \quad BH=CH=\frac{a}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} OH=\frac{OA}{۲} \Rightarrow OH=\frac{R}{۲} \Rightarrow AH=R+\frac{R}{۲}=\frac{۳}{۲}R \\ \overset{\Delta}{ACH}: H=۹۰^\circ \Rightarrow AH=\sqrt{AC^۲+CH^۲} \Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{۳}{۲}R \Rightarrow a=\frac{۳R}{\sqrt{۳}} \Rightarrow a=R\sqrt{۳}$$

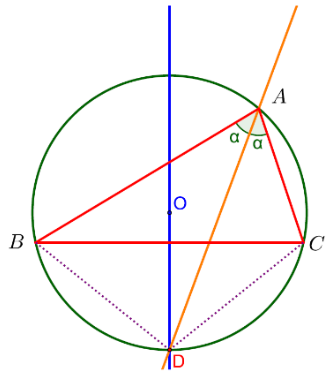
$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ABC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(R\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

راه دوم: باتوجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث همنهشت ساخته شده است . این مثلث های به حالت(ض ز ض) همنهشت هستند.



$$\overset{\Delta}{OBH}: H=۹۰^\circ \Rightarrow BH=\sqrt{R^۲-(\frac{R}{۲})^۲}=\frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC}=۶S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC}=۶\times\frac{۱}{۲}\times\frac{R}{۲}\times\frac{R}{۲}\sqrt{۳} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

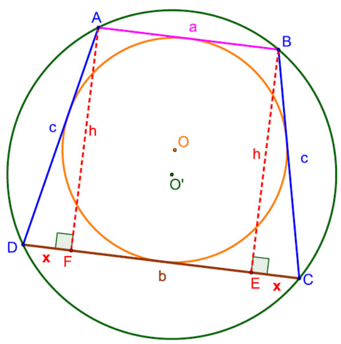


۳ـ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

فرض کنیم نیمساز زاویهٔ BAC دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ D قطع کند:

$$\widehat{BAD}=\widehat{CAD}\xrightarrow{\text{محاطی}}\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}\xrightarrow{\text{ق کمان ها و وترهای مساوی}}BD=CD$$

فاصلهٔ نقطهٔ D از دونقطهٔ B و C به یک اندازه است پس بنا بر خاصیت عمود منصف نقطهٔ D روی عمود منصف پاره خط BC نیز قرار دارد.



۴ـ یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعدهٔ آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

چون ذوزنقهٔ ABCD محاطی است پس متساوی الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است.در نتیجه: $۲c=a+b$ و مثلث ADF قائم الزاویه است.

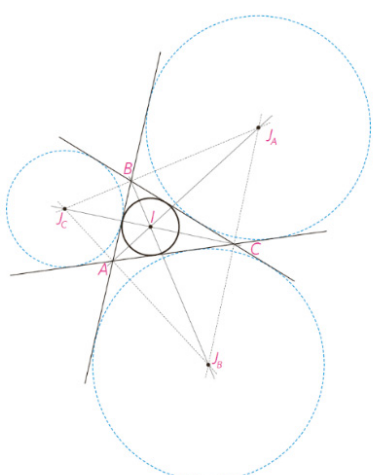
$$۲c=a+b\Rightarrow c=\frac{a+b}{۲}\qquad,\qquad b=۲x+a\Rightarrow x=\frac{b-a}{۲}$$

$$h^{۲}=c^{۲}-x^{۲}\Rightarrow h^{۲}=\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{b-a}{۲}\right)^{۲}\Rightarrow h^{۲}=\frac{۴ab}{۴}\Rightarrow h=\sqrt{ab}$$

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(a+b)\times h\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{ab}$$

۵ـ اگر r_a , r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$



$$S=rp\Rightarrow\frac{۱}{r}=\frac{p}{S}$$

$$r_a=\frac{S}{p-a}\Rightarrow\frac{۱}{r_a}=\frac{p-a}{S}$$

$$r_b=\frac{S}{p-b}\Rightarrow\frac{۱}{r_b}=\frac{p-b}{S}$$

$$r_c=\frac{S}{p-c}\Rightarrow\frac{۱}{r_c}=\frac{p-c}{S}$$

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{۳p-(a+b+c)}{S}=\frac{۳p-۲p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

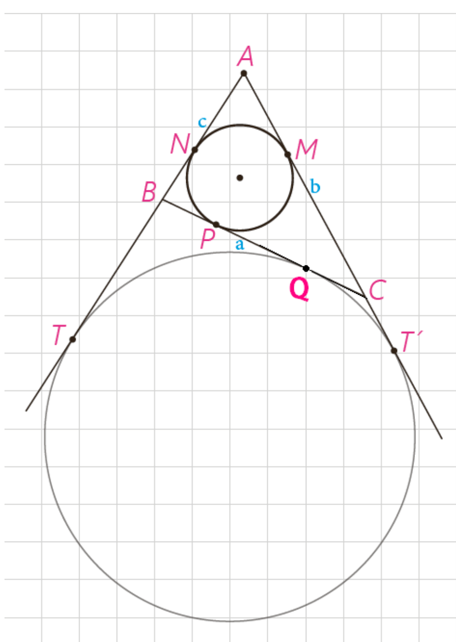
به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} &S=\frac{۱}{۲}ah_a \Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a} \Rightarrow \frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲S}\\ &S=\frac{۱}{۲}bh_b \Rightarrow h_b=\frac{۲S}{b} \Rightarrow \frac{۱}{h_b}=\frac{b}{۲S}\\ &S=\frac{۱}{۲}ch_c \Rightarrow h_c=\frac{۲S}{c} \Rightarrow \frac{۱}{h_c}=\frac{c}{۲S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}+\frac{c}{۲S}=\frac{a+b+c}{۲S}=\frac{۲p}{۲S}=\frac{p}{S}=\frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

۶ــ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و P باشند و T و T′ نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید :



AM=AN=P−a

$$\left.\begin{aligned} &AN=c-BN\\ &AM=b-CM \end{aligned}\right\} \Rightarrow AM+AN=b+c-(BN+CM)$$

$$\xrightarrow[CM=CP\,,\,BN=BP]{AM=AN} ۲AM=b+c-\underbrace{(BP+CP)}_{a}=b+c-a$$

$$۲AM=۲p-۲a \Rightarrow AM=AN=p-a$$

BN=BP=P−b

$$\left.\begin{aligned} &BN=c-AN\\ &BP=a-CP \end{aligned}\right\} \Rightarrow BN+BP=a+c-(AN+CP)$$

$$\xrightarrow[AN=AM\ ,\ CP=CM]{BP=BN} ۲BN=a+c-\underbrace{(AM+CM)}_{b}=a+c-b$$

$$۲BN=۲p-۲b \Rightarrow BN=BP=p-b$$

CM=CP=P−C

$$\left.\begin{aligned} &CM=b-AM\\ &CP=a-BP \end{aligned}\right\} \Rightarrow CM+CP=b+a-(AM+BP)$$

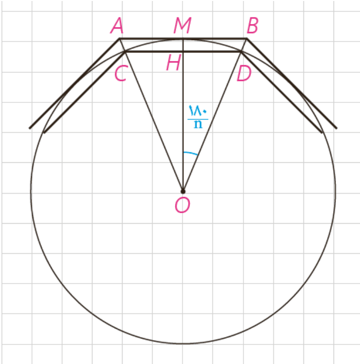
$$\xrightarrow[AN=AM\ ,\ BP=BN]{CM=CP} ۲CM=b+a-\underbrace{(AN+BN}_{c}=b+a-c$$

$$۲CM=۲p-۲c \Rightarrow CM=CP=p-c$$

AT=AT′=P

$$AT+AT'=c+BT+b+CT' \xrightarrow[BT=BQ\,,\,CT'=CQ]{AT=AT'} ۲AT=c+b+\underbrace{BQ+CQ}_{a}=c+b+a=۲p$$

$$\Rightarrow ۲AT=۲p \Rightarrow AT=AT'=p$$



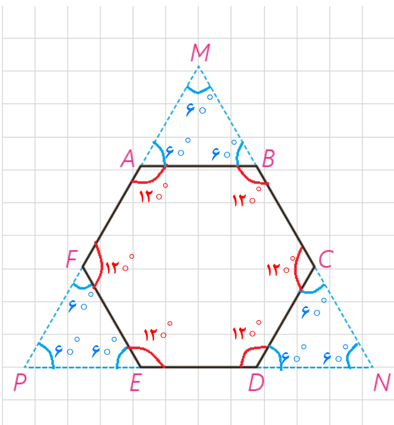
۷ــ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و $CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$.

$$\overset{\Delta}{OHD}: \hat{H} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OD=r} \sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{HD}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲HD}{r}$$

$$\xrightarrow{۲HD=CD} CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$$

$$\overset{\Delta}{OMB}: \hat{M} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OM=r} \tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲MB}{r}$$

$$\xrightarrow{۲MB=AB} AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$$

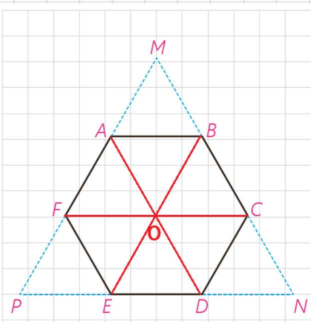


۸ــ شش ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

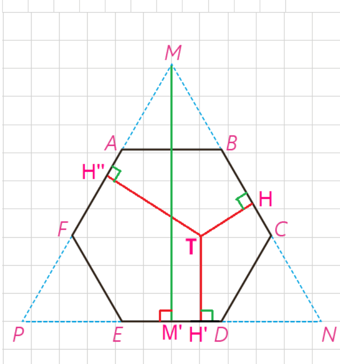
اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰° است . بنا بر این زاویه های خارجی ۶۰° است . با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می گیریم که $\hat{M}=\hat{N}=\hat{P}=۶۰^\circ$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی الساقین است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.



اگر قطر های شش ضلعی منتظم را رسم کنیم آن را به شش مثلث متساوی الاضلاع تقسیم می کنیم و در مثلث MNP ، ۹ مثلث همنهشت ایجاد می شود .

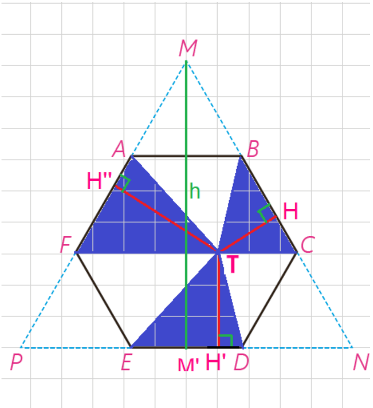
$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{MNP}} = \frac{۶S_{MAB}}{۹S_{MAB}} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$



پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با طول ارتفاع مثلث برابر است:

$$TH + TH' + TH'' = MM'$$



ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :

$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$

$$S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}=\frac{۱}{۲}AF.TH''+\frac{۱}{۲}DE.TH'+\frac{۱}{۲}BC.TH$$

$$\xrightarrow{AF=ED=BC=a} S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}=\frac{۱}{۲}a(\underbrace{TH''+TH'+TH}_{h})=\frac{۱}{۲}ah$$

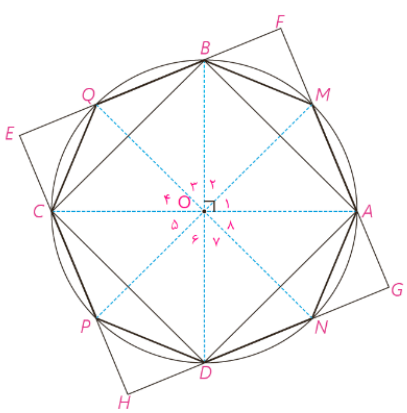
$$\Rightarrow S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}=\frac{۱}{۲}ah$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{۱}{۲}MN.h \xrightarrow{MN=۳a} S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{۳}{۲}a.h$$

$$\Rightarrow \frac{S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}}{S_{MNP}}=\frac{\frac{۱}{۲}ah}{\frac{۳}{۲}a.h}\Rightarrow \frac{S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}}{S_{MNP}}=\frac{۱}{۳}$$

مساحت مثل های آبی رنگ $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث MNP است ومساحت شش ضلعی $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث MNP مساحت مثلث های سفید و آبی برابر با مساحت شش ضلعی است پس مساحت مثلث های سفید هم برابر با $\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$ است بنا براین مساحت مثلث های آبی با مساحت مثلث های سفید برابر است.

$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$



۹ــ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.

در چهار ضلعی ABCD قطر همدیگر را نصف می کنند و باهم برابرندپس مستطیل است و چون قطر ها برهم عمودند نتیجه می گیریم که مربع است.

عمود منصف هر ضلع نیمساز رأس مقابل نیز هست. پس:

$$O_۱=O_۲=O_۳=O_۴=O_۵=O_۶=O_۷=O_۸=۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{BQ}=\overset{\frown}{QC}=\overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{PD}=\overset{\frown}{DN}=\overset{\frown}{NA}$$

$$\Rightarrow AM=MB=BQ=QC=CP=PD=DN=NA$$